DOI: https://doi.org/10.69722/1694-8211-2025-61-5-9
УДК: 517.9

Дюшебаева А., *магистрант, diushebaevva@gmail.com*
ORCID: 0009-0004-2756-9587
Талап кызы А., *магистрант, albishtalap@gmail.com*
ORCID: 0009-0003-2380-0748
Шатанова А. Ш., *магистрант, aselshatanova.1995@gmail.com*
ORCID: 0009-0000-3108-089X
Ташматова А. К., *магистрант, aminamelis27@gmail.com*
ORCID: 0009-0006-7282-625X
К. Тыныстанов ат. ЫМУ
Каракол ш., Кыргызстан

ЖЕКЕ УЧУРДАГЫ БЕНДЖАМИН-БОНА-МАХОНИ ТЕНДЕМЕСИН САНДЫК МЕТОДДОР МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Бенджамин-Бона-Махони теңдемеси илим изилдөөдө кеңири тараган теңдеме болуп саналат. Бул теңдеме көбүнчө гидродинамикада, сызыктуу эмес оптикада жана акустика тармактарында колдонулат. Теңдеме сызыктуу эмес болгондуктан, аны аналитикалык жол менен чыгаруу бир топ кыйынчылыктарды туудурат. Теңдеме цунамилердин пайда болушун жана алардын багыттарын табууну изилдөөдө, интернет технологияларынын ылдам, тез иштөөсүн изилдөөдө кеңири колдонулат. Мындай маселелерди чыгаруу үчүн сандык методдорду колдонууга туура келет. Компьютердик технологиялар өнүккөн сайын, сандык методдорду колдонуу күндөн-күнгө өсүүдө. Анткени мындай маселелердин чыгарылыштарын атайын программалар аркылуу сыпатталыштардан көрүүгө болот. Бул макалада берилген теңдемени чектүү-айырмалар методу менен Python программалоо тилинде Google Colab сервисинде иштетип чыктык. Макалада конкреттүү мисал каралып, жыйынтыгы сүрөттөлүш менен ачык көрсөтүлдү.

Түйүндүү сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, чектүү-айырмалуу метод, компьютердик технологиялар.*

Дюшебаева А., *магистрант, diushebaevva@gmail.com*
ORCID: 0009-0004-2756-9587
Талап кызы А., *магистрант, albishtalap@gmail.com*
ORCID: 0009-0003-2380-0748
Шатанова А. Ш., *магистрант, aselshatanova.1995@gmail.com*
ORCID: 0009-0000-3108-089X
Ташматова А. К., *магистрант, aminamelis27@gmail.com*
ORCID: 0009-0006-7282-625X
ИГУ им. К. Тыныстанова,
г. Каракол, Кыргызстан

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМИНА-БОНА-МАХОНИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Уравнение Бенджамина-Бона-Махони является наиболее распространенным уравнением в научных исследованиях, это уравнение часто используется в гидродинамике, нелинейной оптике и акустике, поскольку уравнение нелинейно, поэтому его аналитическое решение представляет большие трудности. Уравнение широко используется при изучении быстродействия интернет-технологий, изучении возникновения и определения направлений цунами. Для решения такой задачи нам придется использовать численные методы.

Использование численных методов растет день ото дня по мере развития компьютерных технологий. Так как такие задачи можно просматривать на изображениях с помощью специальных программ. В этой статье мы решили дифференциальное уравнение на языке программирования Python с помощью сервиса GoogleColab. В статье был рассмотрен конкретный пример, а результаты четко иллюстрированы описанием.

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение, метод конечных разностей, компьютерные технологии.*

***Dyushebaeva A.**, master's student, diushebaevva@gmail.com*
ORCID: 0009-0004-2756-9587
***Talap kyzy A.**, master's student, albishtalap@gmail.com*
ORCID: 0009-0003-2380-0748
***Shatanova A. Sh.**, master's student, aselshatanova.1995@gmail.com*
ORCID: 0009-0000-3108-089X
***Tashmatova A. K.**, master's student, aminamelis27@gmail.com*
ORCID: 0009-0006-7282-625X
K. Tynystanov Issyk-Kul state university
Karakol, Kyrgyzstan

SOLVING THE BENJAMIN-BON-MAHONEY EQUATION IN A SPECIAL CASE BY NUMERICAL METHODS

The Benjamin-Bon-Mahoney equation is the most common equation in scientific research. This equation is often used in hydrodynamics, nonlinear optics, and acoustics, because the equation is nonlinear, so its analytical solution is very difficult. The equation is widely used in studying the speed of Internet technologies, studying the occurrence and determining the directions of tsunamis. To solve this problem, we will have to use numerical methods. The use of numerical methods is increasing day by day with the development of computer technology. Since such tasks can be viewed on images using special programs. In this article, we solved a differential equation in the Python programming language using the Google Co lab service. A specific example was considered in the article, and the results are clearly illustrated by the description.

***Keywords**: differential equation, nonlinear equation, finite difference method, computer technology.*

Бенджамин-Бона-Махони (BBM) теңдемеси толкун амплитудасы кичинекей жана узундугу чоң болгон чөйрөнүн тереңдигинен же туурасынан кыйла ашып кеткен системалардагы узун толкундардын таралышын сүрөттөйт. BBM теңдемеси көбүнчө гидродинамикада, сызыктуу эмес оптикада жана акустика тармактарында колдонулат:

- **Гидродинамика**: суу бетиндеги толкундарда узун жана амплитудасы аз болгон жээк жагындагы толкундардын же цунами толкундарынын кыймылдарын моделдөөдө;
- **Акустика**: сызыктуу эмес жана дисперсиялык эффектилер маанилүү болгон каналдардагы же толкун өткөргүчтөрдөгү үн толкундарын изилдөөдө;
- **Оптика**: оптобулаларда жарык импульстарынын таралышын изилдөөдө, бул жерде дисперсия сигналы формасында маанилүү роль ойнойт [1].

BBM теңдемеси сызыктуу эмес жана дисперсиялык эффектилерди эске алуу менен чыныгы физикалык процесстерди жогорку тактыкта моделдештирүү мүмкүнчүлүгүн берет [2]. Ошондой эле бул метод сандык моделдештирүү учурунда колдонулганда, каталыктын чоңдугу туруктуу болот. Жогорку жыштыктагы толкундарга азыраак көз каранды болгондуктан, эсептөө жүргүзүүдө туруксуздуктун ыктымалдыгын төмөндөтөт [3].

BBM теңдемеси сызыктуу эмес жана анын аналитикалык чыгарылышы айрым учурларда гана мүмкүн болгондуктан, көбүнчө сандык методдор колдонулат, мисалы:

• Чектүү-айырмалар методу;

• Четтүү элементтер методу;

• Спектралдык методдор.

Мисалы, солитондор үчүн стационардык чыгарылыштарды табуу үчүн, өзгөрмөлөрдү ажыратуу ыкмасы жана Ньютон методу же итерация методу сыяктуу сандык методдор колдонулат [4].

Чакан амплитудалуу узун толкундардын таралышын сүрөттөгөн математикалык моделдердин бири – Бенжамин-Бона-Маони-Бюргерс (BBMB) теңдемеси төмөнкүдөй түрдө берилет [5]:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \qquad (1)$$

$u(x,t)$ — изделүүчү функция.

Чектүү- айырмалар методу

Биз теңдемени чыгаруу үчүн чектүү-айырмалуу схеманы колдонобуз:

- u_j^n— $u(x_j, t^n)$ жакындатылган маанилери,
- Δx — мейкиндиктеги кадамдар,
- Δt — убакыт боюнча кадам белгилөөлөрүн киргизебиз.

Ар бир чекитте аппроксимациялайбыз:

1. (u_t) — убакыт боюнча туунду, биринчи тартиптеги айырма:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \qquad (2)$$

2. (u_x) — мейкиндиктеги туундулар, жакындатылган ортоңку айырмалар:

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \qquad (3)$$

3. (uu_x) — түрүндөгү сызыктуу эмес система:

$$u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \qquad (4)$$

4. u_{xxt} — экинчи тартиптеги туунду:

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \qquad (5)$$

Булардын бардыгын (1) теңдемеге коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0 \qquad (6)$$

Теңдемени теңдеш өзгөртүү жолу менен сызыктуу теңдемелер системасына ээ болобуз:

$$u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) = u_j^{n+1} - \Delta t\left(\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} + u_j^{n}\,\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}\right)$$

Эми бул теңдеменин чыгарылышын талдап чыгалык:

1. Баштапкы жана четки шарттарды аныктап чыгуу керек;
2. Областты торчолорго бөлүштүрүү керек;
3. Ар бир кадамда чектүү-айырмалуу схемасын колдонобуз;
4. Үч диагоналдуу теңдемелер системасын чыгаруу үчүн прогонка методун колдонууга болот.

Биздин ***максат*** ***с***андык методдор менен (6) дифференциалдык теңдемени чектүү-айырмалуу схемасын колдонуп чыгаруу керек. Бул чектүү-айырмалуу схемасы белгилүү бир дифференциалдык теңдеменин сандык жакындатылышын көрсөтөт.

Бул жерде u_j^n функциясы *j*-индекс боюнча мейкиндикте, *n*-индекс боюнча убакытта бөлүштүрүлгөн.

• Биринчи мүчө (2):

Бул *t* убакыт боюнча туундуну алмаштыруу жолу, аны айкын түрдө дискреттештирип жатабыз, анткени u_j^n мурунку убакыттагы мааниси белгилүү.

• Экинчи жана үчүнчү мүчө (3), (4):

Булардын экөө тең *x* боюнча туундулары жана мурунку *n*-убакыт кадамындагы берилиштер менен эсептелет, башкача айтканда, ачык дискретизацияланган болуп саналат.

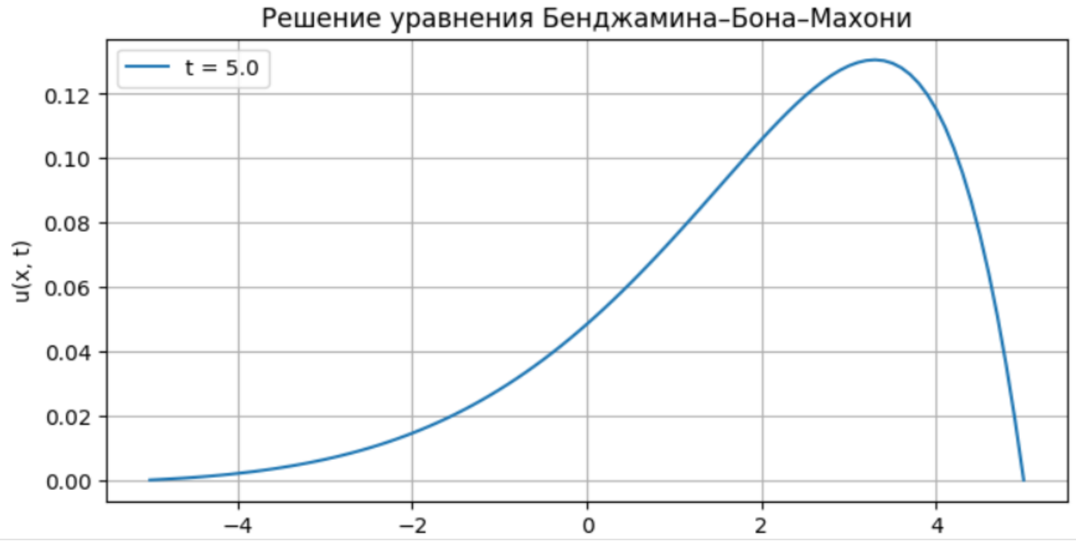
• Төртүнчү мүчө (5):

Бул экинчи тартиптеги *x* боюнча туундусу жана ал жашыруун дискретизацияланган, анткени u^{n+1} белгисиз болгондуктан, убакыттагы жаңы маанилерди табуу үчүн теңдемелер системасын чыгаруу керек.

Биринчи үч мүчө ачык түрдө дискреттештирилет деп айтылганда, алардын кийинки убакыт боюнча кадамындагы мааниси мурунку кадамдардагы белгилүү маанилердин негизинде гана эсептелет дегенди билдирет. Бул ачык схемаларга таандык, аларды эсептөө оңой, бирок туруктуулук боюнча чектөөлөрү болушу мүмкүн.

Ал эми акыркы мүчө жашыруун түрдө дискреттештирилет, демек, ал кийинки убакыт кадамындагы белгисиз маанилерге көз каранды. Бул жашыруун схемаларга мүнөздүү, аларды чечүү үчүн теңдемелер системасын чыгаруу керек, бирок адатта туруктуураак болот.

Жогоруда каралган алгоритм боюнча Python программалоо тилинде конкретүү мисалды алып *GoogleColab* сервисинде чыгарып, төмөндөгүдөй жыйынтыкка ээ болдук (1-сүрөт):



1-сүрөт.

Адабияттар:

1. Sweilam N. H., Abou Hasan M. M., Aalbalawi A. O. Numerical solutions of Benjamin-Bona-Mahony-burgers equation via nonstandard finite difference scheme // Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 6(2) July 2018, pp. 237-245.

2. Omrani K., Ayadi M., Finite di erence discretization of the Benjamin- Bona-Mahony Burgers equation, Numerical Methods for Partial Di erential Equations, 24, 1, (2008), 239 248, 10.1002/num. 20256.

3. Бенджамин Т. Б., Бона Дж. Л., и Махони Дж. Дж., Модель уравнения для длинный волны в нелинейный дисперсионный системы. Филос Транс Рой Соц. Лонд А 272 (1972), pp. 47–78.

4. Раупп М. А., Галеркин методы применяемый к Бенджамин-Бона-Махони уравнение. Бол Соц. Бразилия Мат6 (1975), pp. 65–77.

5. Каракеев, Т. Т. Регуляризация нелокальной краевой задачи для уравнения Бенжамина-Бона-Махони [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Приволжский научный вестник. - 2016. - № 1(53). - С. 10-15. - EDN VJLTEP.